

POUŽITIE METÓDY MONTE CARLO PRI OCEŇOVANÍ EURÓPSKÝCH CALL A PUT OPCÍ

Lucia Vrábelová*

Úvod

Začiatkom sedemdesiatych rokov 20. storočia odvodili F. Black a M. Scholes diferenciálnu rovnicu, ktorú musí spĺňať ľubovoľný derivát bezdividendovej akcie. Za ich prácu im bola neskôr udelená Nobelova cena a ich, dnes už známa rovnica, sa stala vo finančnej matematike jedným z najpoužívanějších spôsobov oceňovania finančných derivátov.

Metóda Monte Carlo je v matematike veľmi používanou numerickou metódou. Pomocou tejto metódy môžeme simulovať vývoj ceny akcie. Použijeme túto metódu na stanovenie ceny zodpovedajúcej call opcie.

Základné pojmy

Finančný derivát je finančný nástroj, ktorého hodnota závisí na hodnote iného finančného aktíva (akcia, burzový index, výmenný kurz). *Opcia* je finančný derivát, ktorý dáva jej vlastníkovi právo kúpiť / predáť dané aktívum (napr. akciu) v danom čase T v budúcnosti za vopred dohodnutú cenu X . Vyrovnanie opcie nie je povinné, opcia môže vypršať bez uplatnenia.

Call opcia je kúpna opcia, zaisťuje vlastníkovi právo na kúpu. *Put opcia* je predajná opcia, dáva vlastníkovi právo predáť aktívum.

Stochastické procesy

Black – Scholesov model oceňovania opcií vychádza z teórie stochastických procesov.

Stochastický proces je systém náhodných premenných $\{X(t), t \in T\}$.

Markovov proces je proces, pri ktorom cena akcie je náhodná veličina, ktorej hodnota v budúcom období závisí len od jej súčasnej hodnoty a nie od vývoja v minulosti. Špeciálnym typom Markovovho procesu je *Wienerov proces*. Model spávania sa ceny akcie zväčša vychádza z Wienerovho procesu. Tento predpokladá zmenu Δz náhodnej veličiny (ceny akcie) počas krátkeho časového intervalu Δt . Potom premenná Δz spĺňa Wienerov proces, ak má tieto dve vlastnosti:

Vlastnosť 1: $\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$, kde $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Vlastnosť 2: Hodnoty Δz sú pre rôzne časové intervaly Δt nezávislé.

Zovšeobecnený Wienerov proces je definovaný

$$dx = a dt + b dz, \quad (1)$$

kde a, b sú konštanty.

Itoov proces je typom zovšeobecneného Wienerovho procesu, kde parametre a, b sú funkciami premennej x a času t :

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz. \quad (2)$$

* Mgr. Lucia Vrábelová, Katedra spojov, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov, Žilinská univerzita, Univerzitná 1, 010 26 Žilina, tel.: 5133140, e-mail: Lucia.Vrabelova@fpedas.utc.sk

Proces pre cenu akcie

Uvažujme cenu bezdividendovej akcie. Predpokladáme, že cena akcie spĺňa Wienerov proces, teda platí:

1. Očakávaná návratnosť akcie nezávisí od jej aktuálnej hodnoty, ale je daná v percentách z ceny akcie. Očakávanú návratnosť označíme μ . Teda ak cena akcie je S , tak za krátky časový interval Δt je očakávaná návratnosť akcie rovná $\mu S \Delta t$.
2. Variabilita návratnosti za krátky časový interval nezávisí od ceny akcie, je tiež daná v percentách. Mieru rizika návratnosti označíme σ (volatilita). Potom volatilita ceny akcie za krátky časový interval Δt je rovná $\sigma \sqrt{\Delta t}$.

Z týchto argumentov vyplýva, že cena akcie S môže byť popísaná Itoovým procesom (2), teda

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3)$$

alebo

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz. \quad (4)$$

Táto rovnica popisuje ďalší stochastický proces, *geometrický Brownov pohyb*. Jej diskrétna verzia je

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \sqrt{\Delta t} \varepsilon, \quad (5)$$

kde $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Z rovnice (5) vyplýva, že $\frac{\Delta S}{S}$ je normálne rozdelená náhodná premenná so strednou hodnotou $\mu \Delta t$ a štandardnou odchýlkou $\sigma \sqrt{\Delta t}$, teda

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}). \quad (6)$$

Metóda Monte Carlo

Najbežnejším použitím metódy Monte Carlo vo financiách je výpočet očakávanej hodnoty nejakej funkcie s danou hustotou pravdepodobnosti. Pri simulácii vývoja ceny akcie budeme postupovať takto:

- o Vyberieme náhodnú realizáciu pre cenu akcie S : $S_0, S_{\Delta t}, S_{2\Delta t} \dots, S_{T=n\Delta t}$,
- o vypočítame cenu derivátu (call opcie) pri takomto vývoji ceny akcie,
- o opakujeme potrebný počet krát,
- o z výsledných cien derivátov vypočítame priemer a diskontujeme ho do času 0.

Majme akciu s počiatočnou cenou \$20 a predpokladajme, že očakávaná návratnosť akcie je 10% ročne a volatilita je 15% ročne[†], teda platí:

$$\mu = 0,10$$

$$\sigma = 0,15.$$

Ďalej predpokladáme, že časové intervaly sú dĺžky 0,001 roku (0,365 dňa), teda $\Delta t = 0,001$.

Z toho vyplýva, že $\Delta S/S$ je normálne rozdelená náhodná premenná so strednou hodnotou $\mu \Delta t = 0,00010$ a štandardnou odchýlkou $\sigma \sqrt{\Delta t} = 0,00474$, teda

[†] Túto hodnotu sme použili len ako príklad. Volatilita je jediný parameter v Black – Scholesovej rovnici, ktorý sa nedá stanoviť z ceny akcie priamo. Postup na presné stanovenie tzv. implicitnej volatility pozri bližšie [1].

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(0,00010; 0,00474).$$

Vývoj ceny akcie simulujeme opakovaným výberom z $N(0,00010; 0,00474)$ rozdelenia. Použijeme nasledujúci postup:

- o Urobíme náhodný výber z rovnomerného rozdelenia $x_1, \dots, x_{12} \sim R(0,1)$,
- o použitím vzťahu $v_1 = \sum_{i=1}^{12} x_i - 6$ dostaneme výber v_1 z rozdelenia $N(0,1)$,
- o pomocou vzťahu $v_2 = 0,00010 + 0,00474v_1$ dostaneme výber v_2 z rozdelenia $N(0,00010; 0,00474)$,
- o použitím vzťahu (5) vypočítame zmenu ceny akcie ΔS ,
- o na začiatku ďalšieho časového intervalu bude cena akcie S rovná predchádzajúcej cene zmenenej o ΔS ,
- o postup opakujeme potrebný počet krát.

Itoova lema

Predpokladajme, že náhodná premenná x spĺňa Itoov proces, teda platí rovnica (2), kde z je Wienerov proces a a , b sú funkcie x a času t . Nech f je hladká funkcia, dostatočne veľa krát diferencovateľná.

Potom $f = f(x, t)$ je Itoov proces, ktorý spĺňa rovnicu

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mu + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} \sigma dz, \quad (7)$$

kde z je rovnaký Wienerov proces ako v rovnici (2).

Teda ak máme proces pre cenu akcie daný rovnicou (3) s konštantnými parametrami μ a σ , tak z Itoovej lemy vyplýva, že cena $f = f(S, t)$ derivátu takejto akcie je

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz. \quad (8)$$

Black – Scholesova parciálna diferenciálna rovnica

Nech platia predpoklady:

1. Cenu akcie môžeme popísať geometrickým Brownovým pohybom (4) s konštantnými parametrami μ a σ .
2. Je možný predaj nakrátko[‡] s plným využitím výnosu (nie je potrebné žiadne krytie).
3. Transakčné náklady a dane sú nulové. Všetky cenné papiere sú ľubovoľne deliteľné.
4. Akcia neposkytuje počas životnosti derivátu žiadne dividendy.
5. Neexistuje príležitosť pre arbitráž.
6. Obchodovanie s cennými papiermi je spojité.
7. Bezriziková úroková miera r je konštantná a rovnaká pre všetky doby viazanosti.

Nech f je cena derivátu akcie S , pre ktorú platí Itoova lema.

Portfólio π tvorí: -1 derivát f

[‡] Predaj akcie nakrátko znamená, že ak očakávame pokles ceny akcie, „požičiame“ si akciu od niekoho, kto ju vlastní a predáme ju. Pri uplatnení call opcie túto akciu kúpime a vrátime majiteľovi. Pri takomto obchodovaní sa v praxi vyžaduje peňažné krytie ako záruka za pôžičku.

$$+ \frac{\partial f}{\partial S} \text{ akcií } S.$$

Toto portfólio je vytvorené tak, aby bolo bezrizikové, teda výnos z neho je vždy rovný bezrizikovej úrokovej miere r . Takýto výnos zaručene dosiahneme pri poklese aj vzraze ceny akcie.

$$\text{Hodnota portfólia na začiatku je } \pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S.$$

$$\text{Zmena hodnoty portfólia za čas } \Delta t \text{ je } \Delta \pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S.$$

Dosadením rovníc (5) a (8) do tejto rovnice s použitím predpokladu, že portfólio je bezrizikové dostávame Black – Scholesovu rovnicu[§]

$$r f = \frac{\partial f}{\partial t} + r S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}. \quad (9)$$

Riešenie Black – Scholesovej rovnice

Black – Scholesova rovnica má veľa riešení, závisia od zvolených počiatočných podmienok. Pre klasickú európsku call opciu je počiatočná podmienka daná:

$$f = \max(S - X, 0) \quad \text{v čase } t = T.$$

V prípade európskej put opcie je počiatočná podmienka:

$$f = \max(X - S, 0) \quad \text{v čase } t = T.$$

Očakávaná hodnota európskej call opcie v čase T (koncová podmienka) je

$$\hat{E}[\max(S_T - X, 0)].$$

Potom riešením Black – Scholesovej rovnice pre cenu európskej call opcie c je vzorec^{**}

$$c = S N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (10)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}.$$

Funkcia $N(x)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Medzi cenou európskej call opcie a put opcie platí vzťah, ktorý sa nazýva *put – call parita*:

$$c + X e^{-r(T-t)} = p + S. \quad (11)$$

Cenu európskej put opcie môžeme vypočítať z Black – Scholesovej rovnice rovnakým spôsobom ako cenu call opcie, alebo môžeme použiť (11). Dostaneme vzťah pre cenu európskej put opcie p :

$$p = X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S N(-d_1). \quad (12)$$

Pri použití Black – Scholesovho vzorca potrebujeme hodnoty kumulatívnej distribučnej funkcie normálneho rozdelenia $N(x)$. Tieto hodnoty nájdeme v tabuľkách, alebo môžeme funkciu $N(x)$ popísať numericky

[§] Bližšie odvodenie pozri [1].

^{**} Bližšie odvodenie vzorca pozri [2]

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + a_4 k^4 + a_5 k^5) & \text{pre } x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{pre } x < 0 \end{cases} \quad (13)$$

kde

$$k = \frac{1}{1 + \gamma x}, \gamma = 0,2316419, a_1 = 0,319381530, a_2 = -0,356563782, a_3 = 1,781477937,$$

$$a_4 = -1,821255978, a_5 = 1,330274429, N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Táto aproximácia je presná na 6 desatinných miest.

Použitie metódy Monte Carlo pre oceňovanie klasických európskych opcií

Použijeme nasledujúci postup na oceňovanie európskej call opcie:

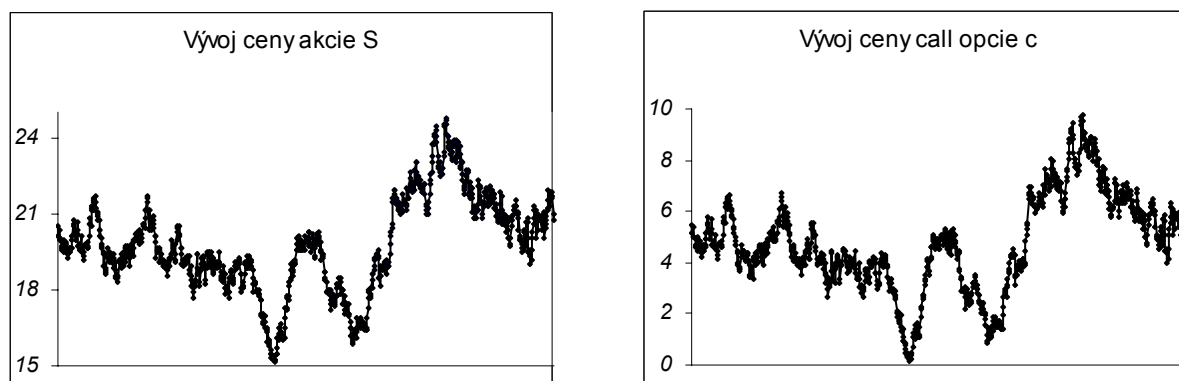
1. Zvolíme počiatočnú cenu akcie S , realizačnú cenu opcie X , očakávanú návratnosť μ , volatilitu σ , dĺžku časového kroku Δt ,
2. vývoj ceny akcie S na n krokov simulujeme pomocou Monte Carlo metódy,
3. z posledných cien akcie v simulácii vypočítame cenu call opcie zo vzťahu (10), pričom hodnoty funkcie $N(x)$ počítame pomocou aproximácie (13),
4. kroky 2 a 3 opakujeme potrebný počet krát,
5. vypočítame priemer výsledných cien opcie z kroku 3,
6. priemer diskontujeme do času 0.

Chybu v Monte Carlo simulácii stanovíme ľahko, stačí porovnať priemernú cenu call opcie získanú z kroku 6 s cenou vypočítanou z počiatočnej ceny akcie. Túto vypočítame tiež dosadením do (10), pričom $T = n\Delta t$.

Príklad výstupu

Nech počiatočná cena akcie je $S = \$20$, realizačná cena opcie je $X = \$15$, očakávaná návratnosť akcie je $\mu = 0,10$, volatilita je $\sigma = 0,15$, bezriziková úroková miera je $r = 0,10$. Dĺžku časového kroku zvolíme $\Delta t = 0,001$ (0,365 dňa).

Možný vývoj ceny akcie simulujeme postupne na $n = 10$ krokov dĺžky Δt . Nasledujúci obrázok ukazuje výstup zo simulácie pre 1000 opakovaní.



Obr. 1: Výstup zo simulácie vývoja ceny akcie a call opcie, 1000 opakovaní simulácie. Priemer (stredná hodnota) z takto vypočítaných cien opcie je \$4,752, tento priemer diskontujeme do času 0. Dostávame Monte Carlo odhad ceny opcie:

$$c = e^{-0,10 \cdot 10 \cdot 0,001} \cdot 4,752 = 4,747.$$

Chybu Monte Carlo metódy vypočítame podľa vzorca

$$s = \frac{\omega}{\sqrt{M}}, \quad (14)$$

kde ω je štandardná odchýlka odhadov cien call opcie získaných zo simulácií a M je počet opakovaní simulácie, v našom príklade $M = 1000$. Dosadením do (14) dostávame chybu $s = 0,05837$.

Odhad ceny call opcie získaný Monte Carlo simuláciou vývoja ceny zodpovedajúcej akcie môžeme porovnať s cenou opcie, ktorú vypočítame z počiatočnej ceny akcie \$20 s $T = 10 \Delta t$. Dostávame $c = \$5,015$.

Kedže presnosť odhadu je nepriamo úmerná druhej odmocnine počtu opakovaní, platí, že ak chceme dosiahnuť napr. 10 krát vyššiu presnosť odhadu, musíme počet opakovaní zvýšiť 100 krát.

Záver

Popísaná simulácia sa dá použiť pre ľubovoľné parametre $S, X, \mu, \sigma, \Delta t, n, r$. Pri generovaní výberu z normálneho rozdelenia je možné použiť aj generátor pseudo-náhodných čísel (napr. kongruenčný generátor), ktorý má tú výhodu, že chyba odhadu je nepriamo úmerná počtu opakovaní simulácie, nie jeho druhej odmocnine.

Resumé

This article deals with application of Monte Carlo method in option pricing, especially european call stock option. Using Monte Carlo method we simulate course of corresponding stock price. We keep the required number of iterations. Using the last stock prices we calculate the prices of call option, their discounted average represent the Monte Carlo estimation of the option price. Comparing this price with the real option price we are able to determine an error of the estimate.

Literatúra

- [1] Hull, J. C.: Options, Futures, and Other Derivatives. 3. vyd. New York: Prentice Hall, 1997. 572 s. ISBN 0131864793
- [2] Ševčovič, D.: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/derivaty/index.html>
- [3] Jäckel, P.: Monte Carlo Methods in Finance. 1. vyd. Chichester, West Sussex, England: J. Wiley and Sons, 2002. 222 s. ISBN 0-471-49741-X
- [4] Chovancová, B. – Jankovská, A. – Hájniková, J. – Majcher, M. – Šturc, B.: Finančný trh: nástroje, transakcie, inštitúcie. 1. vyd. Bratislava: EUROUNION, 1999. 538 s. ISBN 8088984033