

OCEŇOVANIE LOOKBACK OPCÍ

Mgr. Lucia Vrábellová¹, Doc. Ing. Iveta Kremeňová, PhD.²

Úvod

Oceňovanie opcií na akcie a na iné finančné nástroje je veľmi dôležitou súčasťou obchodovania s opciami. Cena opcie musí byť správne stanovená, aby sa predišlo možným špekuláciám a arbitrážnym príležitostiam, ktoré predstavujú pre obchodníka bezrizikový zisk. Lookback opcie sú špeciálnym typom exotických opcií, ktorých payoff (výplata) závisí od celkového vývoja ceny podkladového aktíva počas doby životnosti opcie. Metóda binomických stromov je numerickou metódou oceňovania opcií. Článok uvádza porovnanie ceny lookback opcie európskeho typu a amerického typu vypočítanej pomocou metódy binomických stromov.

Základné pojmy

Finančný derivát je finančný nástroj, ktorého hodnota závisí na hodnote iného finančného aktíva (akcia, burzový index, výmenný kurz).

Opcia je finančný derivát, ktorý dáva jej vlastníčkovi právo kúpiť / predáť dané aktívum (napr. akciu) v danom čase T v budúcnosti za vopred dohodnutú realizačnú cenu X . Vyrovnanie opcie nie je povinné, opcia môže vypršať bez uplatnenia. *Opcia európskeho typu* dáva vlastníčkovi právo kúpiť / predáť aktívum len v čase T , *opcia amerického typu* dáva vlastníčkovi právo kúpiť / predáť aktívum kedykoľvek v časovom intervale $\langle 0, T \rangle$.

Call opcia je kúpna opcia, zaisťuje vlastníčkovi právo na kúpu. *Put opcia* je predajná opcia, dáva vlastníčkovi právo predáť aktívum.

Lookback opcia je exotická opcia, ktorej payoff závisí od maximálnej resp. minimálnej ceny podkladového aktíva (akcie) dosiahnutej počas doby životnosti opcie. Existujú dva druhy lookback opcií:

¹ Mgr. Lucia Vrábellová, Katedra spojov, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov, Žilinská univerzita, Univerzitná 1, 010 26 Žilina, tel.: 5133140, e-mail: Lucia.Vrabelova@fpedas.utc.sk

² Doc. Ing. Iveta Kremeňová, PhD., Katedra spojov, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov, Žilinská univerzita, Univerzitná 1, 010 26 Žilina, tel.: 5133100, e-mail: iveta.kremenova@fpedas.utc.sk

- **floating strike lookback opcia** s plávajúcou realizačnou cenou, jej payoff je vyjadrený maximom resp. minimom ceny v období od dohodnutia kontraktu až po jeho vysporiadanie a cenou v čase expirácie:
 - payoff lookback call opcie s plávajúcou realizačnou cenou je rovný rozdielu $S_T - S_{min}$,
 - payoff lookback put opcie s plávajúcou realizačnou cenou je rovný rozdielu $S_{max} - S_T$,
- **fixed strike lookback opcia** s fixnou realizačnou cenou
 - payoff lookback call opcie s fixnou realizačnou cenou je rovný rozdielu $S_{max} - X$,
 - payoff lookback put opcie s fixnou realizačnou cenou je rovný rozdielu $X - S_{min}$.

Oceňovanie opcií metódou binomických stromov

Binomické stromy sú veľmi používanou numerickou metódou na oceňovanie opcií alebo iných finančných derivátov. Veľkou výhodou tejto metódy je jej univerzálnosť, pomocou binomických stromov sa dá oceniť ľubovoľný finančný derivát. Takisto je možné pomocou tejto metódy oceňovať aj deriváty na akciu poskytujúcu dividendy a path – dependent deriváty³. Binomický strom reprezentuje možný vývoj ceny akcie počas doby životnosti derivátu. V modeli pracujeme len s diskretným časom, teda predpokladáme zmenu ceny akcie vždy po uplynutí časového obdobia Δt .

Nech portfólio π tvorí: -1 derivát f ,
 Δ akcií S .

Nech počiatočná cena akcie je S . Binomický model predpokladá, že S môže po časovom kroku Δt len vzrásť na hodnotu $S_u = S \cdot u$ alebo poklesnúť na hodnotu $S_d = S \cdot d$, pričom u je koeficient vzrastu, d je koeficient poklesu. Nech f_u je cena derivátu akcie pri vzraste akcie na hodnotu S_u a f_d je cena derivátu akcie pri poklese ceny akcie na S_d . Táto cena sa pri lookback opcií vypočíta pomocou nasledujúcich vzťahov:

- lookback call opcia s plávajúcou realizačnou cenou $f = S_T - S_{min}$, (1)

- lookback put opcia s plávajúcou realizačnou cenou $f = S_{max} - S_T$, (2)

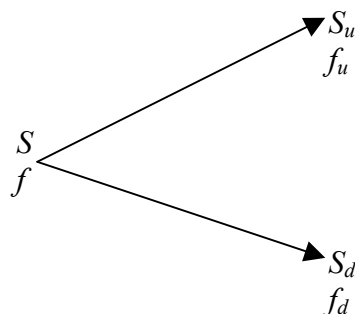
³ opcie, ktorých payoff závisí od cesty, ktorou sa vyvíjala cena akcie počas doby životnosti derivátu, takouto opciou je aj lookback opcia

◦ lookback call opcia s fixnou realizačnou cenou $f = S_{max} - X$, (3)

◦ lookback put opcia s fixnou realizačnou cenou $f = X - S_{min}$, (4)

pričom S_{max} a S_{min} je maximálna resp. minimálna cena podkladového aktíva (akcie) dosiahnutá počas doby životnosti derivátu.

Túto situáciu znázorňuje nasledujúci jednokrokový binomický strom:



Obrázok 1 Jednokrokový binomický model

Počet akcií Δ v portfóliu bude taký, aby portfólio bolo bezrizikové, teda aj pri poklese aj pri vzraste ceny akcie portfólio prináša istý zisk rovný bezrizikovej úrokovej miere r .

Potom budúca hodnota π pri vzraste ceny akcie bude $S \cdot u \cdot \Delta - f_u$ a hodnota π pri poklese ceny akcie bude $S \cdot d \cdot \Delta - f_d$.

Pretože portfólio je bezrizikové, obe tieto hodnoty sa rovnajú. Z toho vyplýva, že potrebný počet akcií v portfóliu Δ je:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}. \quad (4)$$

Súčasná hodnotu portfólia je rovná jeho budúcej hodnote diskontovanej do času 0 pri bezrizikovej úrokovej miere r :

$$SH_{\pi} = e^{-r\Delta t} (p \cdot f_u + (1-p) \cdot f_d), \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (5)$$

Potom cenu derivátu je

$$f = e^{-r\Delta t} (p \cdot f_u + (1-p) \cdot f_d). \quad (6)$$

Číslo p predstavuje pravdepodobnosť nárastu ceny akcie, číslo $1-p$ predstavuje pravdepodobnosť poklesu ceny akcie.

Uvedený jednokrokový binomický model sa dá jednoduchým spôsobom rozšíriť na viackrokový, pričom vzorce zostávajú v platnosti.

Pomocou vzorcov (4) – (6) sa dá oceniť ľubovoľný derivát európskeho typu. Čo sa týka opcií amerického typu, tieto na rozdiel od európskych môžu byť uplatnené v ľubovoľnom čase počas životnosti opcie. V prípade americkej opcie môžeme postupovať rovnakým spôsobom ako pri uvedenom jednokrokovom resp. viackrokovom modeli, avšak pri výpočte cien sprava doľava testujeme každý bod stromu, či skoršie uplatnenie opcie je optimálne. Hodnoty americkej opcie v koncových bodoch stromu sú rovnaké ako u európskej opcie (vypočítané pomocou (1) – (4)). V skorších bodoch stromu je hodnota derivátu tá väčšia s hodnôt:

- hodnota vypočítaná zo vzťahu (6),
- payoff so skoršieho uplatnenia vypočítaný zo vzťahu (1) – (3).

Príklady oceňovania opcií metódou binomických stromov

V nasledujúcom príklade ukážeme ocenenie európskej a americkej lookback put opcie s plávajúcou realizačnou cenou. Použijeme štvorkrokový binomický model, pričom sú dané parametre:

$$S = 200, X = 180, r = 0,09, \sigma = 0,2, \Delta t = 0,1.$$

Hodnoty koeficientov u a d vypočítame pomocou vzťahov

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Teda: $u = 1,0653, d = 0,9387$.

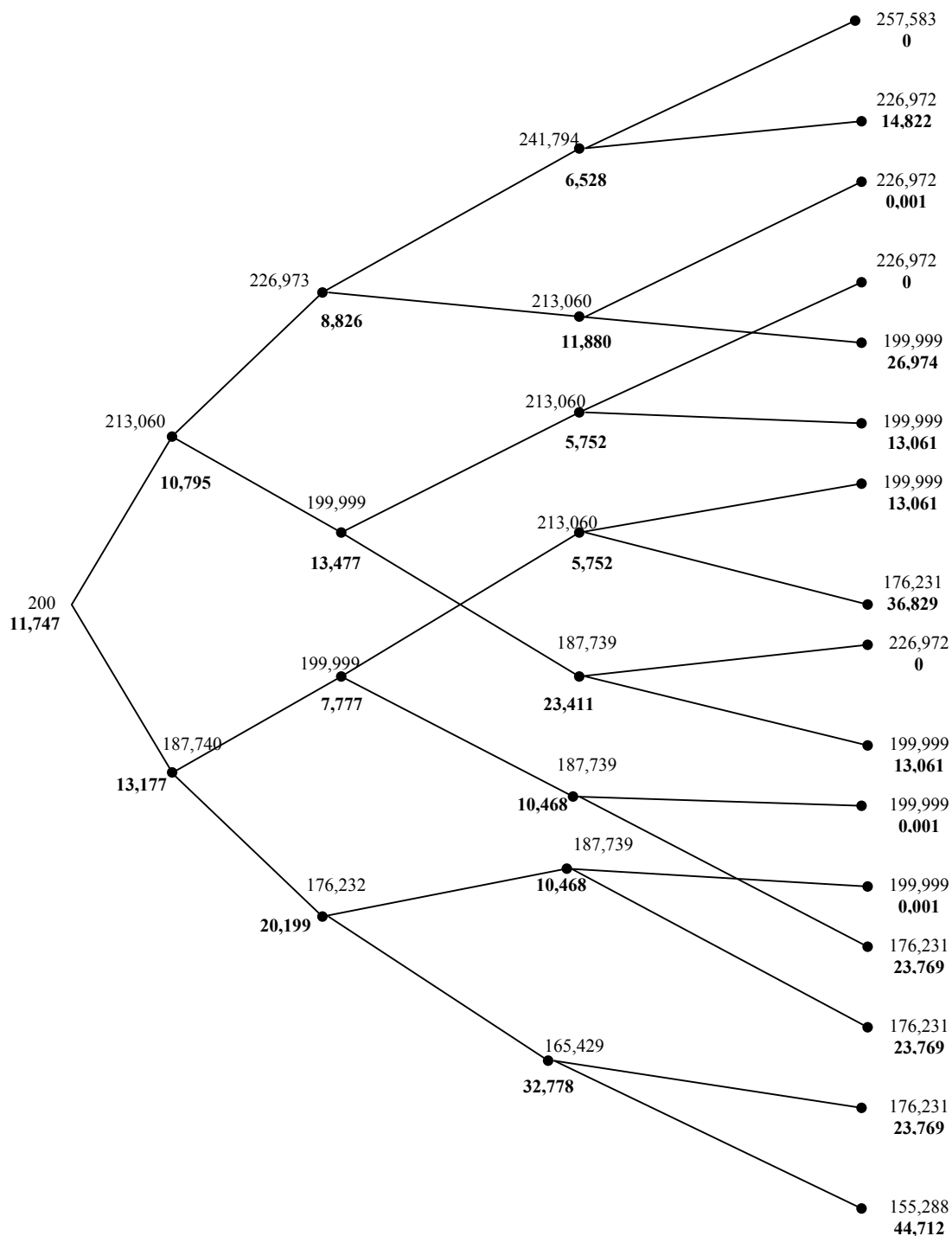
Hodnota pravdepodobnosti nárastu ceny akcie je $p = 0,5556$, hodnota pravdepodobnosti poklesu ceny akcie je $1 - p = 0,444$.

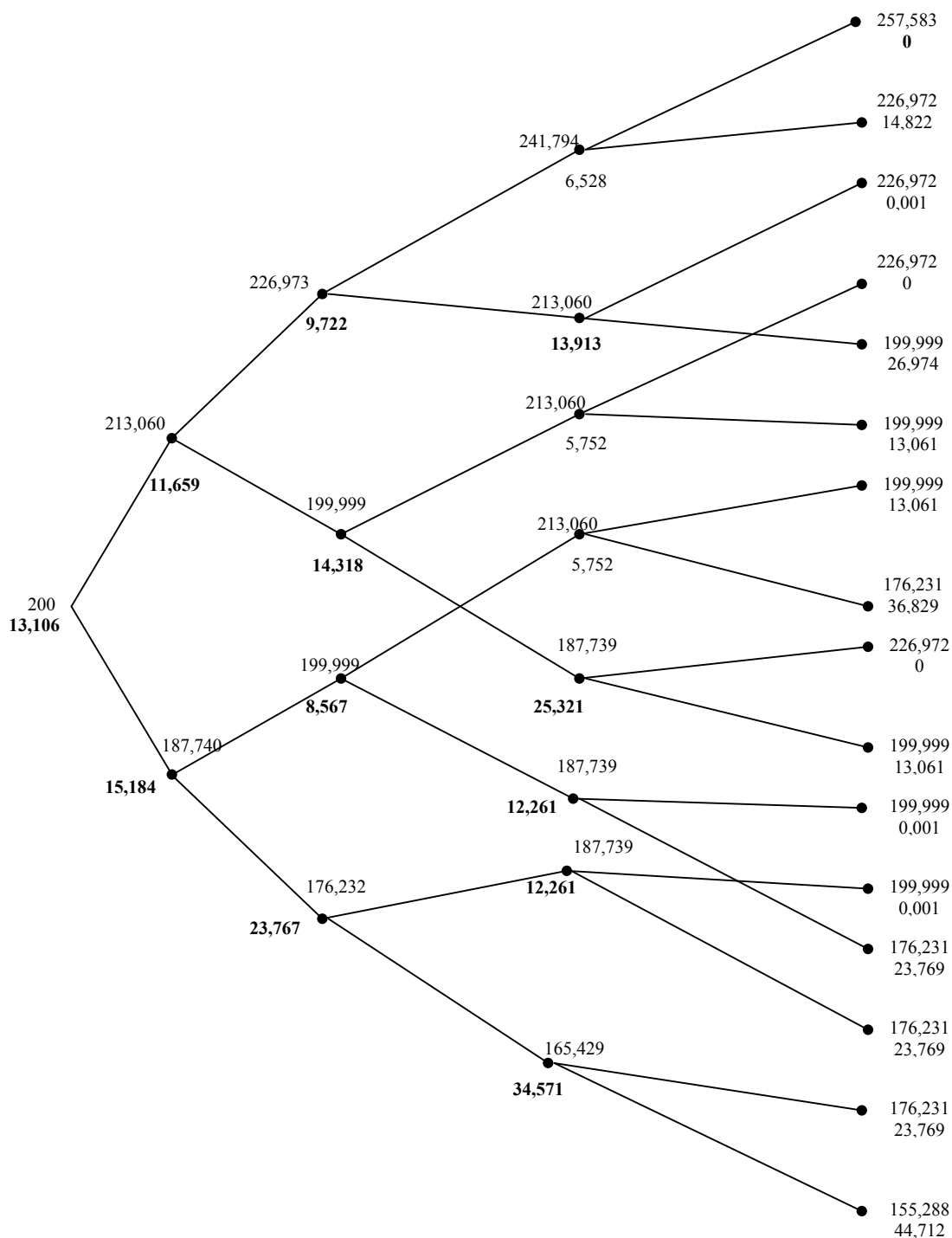
Riešenie

Hodnoty akcie v jednotlivých bodoch sú vypočítané pomocou vzťahu $S_u = S \cdot u$ alebo $S_d = S \cdot d$, pričom u je koeficient vzrastu, d je koeficient poklesu.

Pomocou vzťahu (2) sa vypočítajú ceny európskej aj americkej lookback put opcie v koncových bodoch stromu a pri výpočte cien európskej lookback put opcie v ďalších bodoch stromu sa pokračuje v strome smerom sprava doľava použitím vzťahu (6). Pri výpočte cien americkej lookback put opcie v ďalších bodoch stromu testujeme, či skoršie uplatnenie opcie je optimálne. Na Obrázku 2 a 3 je tučným písmom zvýraznená hodnota, kde sa cena americkej opcia odlišuje od európskej v dôsledku skoršieho uplatnenia opcie.

Hodnoty európskej a americkej floating lookback put opcie znázorňujú nasledujúce stromy, pričom horná hodnota je vždy cena akcie a dolná hodnota je cena opcie v danom bode stromu.





Obrázok 3 Ocenenie americkej floating lookback put opcie pomocou binomického stromu

Cena európskej floating lookback put opcie v čase 0 je \$11,747 a cena americkej floating lookback put opcie v čase 0 je \$13,106. Na tomto príklade je zrejmé, že cena americkej opcie musí byť väčšia ako cena zodpovedajúcej európskej opcie, nakoľko opcie vlastne predstavujú

„právo na kúpu alebo predaj“ a pri americkej opcii je možnosť voľby väčšia, nakoľko jej vlastník sa môže rozhodnúť uplatniť ju kedykoľvek v priebehu jej životnosti. Za toto právo musí samozrejme zaplatiť vyššiu cenu ako v prípade európskej opcie, kde takú veľkú možnosť voľby nemá.

Uvedeným spôsobom sa dá vypočítať cena ľubovoľnej lookback opcie či už európskeho alebo amerického typu s ľubovoľnými parametrami (cena akcie v čase 0, expiračná cena X , doba splatnosti T , úroková miera r , volatilita σ , časový interval Δt).

Záver

Uvedená numerická metóda výpočtu ceny lookback call opcie sa dá použiť pre ľubovoľné parametre S , X , r , μ , σ , Δt . Jej nevýhodou je časová náročnosť výpočtu, ak chceme dosiahnuť vyššiu presnosť výpočtu, je potrebné zvoliť viac časových krokov menšej dĺžky. S rastúcim počtom krokov sa zvyšuje počet bodov v strome, pri oceňovaní path – dependent opcií ako je aj lookback opcia sa tento počet po každom kroku zvyšuje niekoľkonásobne. Metóda binomických stromov pracuje s diskrétnym časom.

Literatúra

- [1] HULL, J. C.: Options, Futures, and Other Derivatives. 3. vyd. New York: PRENTICE HALL, 1997. 572 s. ISBN 0131864793
- [2] ŠEVČOVIČ, D.: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Dostupné na: <<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/derivaty/index.html>>
- [3] JÄCKEL, P.: Monte Carlo Methods in Finance. 1. vyd. Chichester, West Sussex, England: J. WILEY AND SONS, 2002. 222 s. ISBN 0-471-49741-X
- [4] CHOVANCOVÁ, B. – JANKOVSKÁ, A. – HÁJNIKOVÁ, J. – MAJCHER, M. – ŠTURC, B.: Finančný trh: nástroje, transakcie, inštitúcie. 1. vyd. Bratislava: EUROUNION, 1999. 538 s. ISBN 8088984033

Zadané na uverejnenie: **22. mája 2006**